

# TD Déterminant

**KFW Exercice 1** 🍂🏠 Calculer sous forme factorisée les déterminants suivants :

**Ind :** Utiliser des opérations sur lignes.

1.  $\begin{vmatrix} 1 & \omega^2 & \omega \\ \omega & 1 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{vmatrix}$ , où  $\omega = e^{2i\pi/3}$

2.  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & b+c & a+c \\ ab & bc & ac \end{vmatrix}$

3.  $\begin{vmatrix} \cos a & \cos(a+k) & \cos(a+2k) \\ \cos b & \cos(b+k) & \cos(b+2k) \\ \cos c & \cos(c+k) & \cos(c+2k) \end{vmatrix}$

## Calculs

**MA8 Exercice 2** 🍂🏠 Calculer les déterminants de taille  $n$  :  $V_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$  et  $V_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$ .

**FKB Exercice 3** On considère la matrice de permutation  $M_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})$ . Calculer  $\det M_\sigma$ .

**V76 Exercice 4** Soit  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Calculer  $\det((-1)^{i+j} a_{ij})$ .

**SI9 Exercice 5** 🍂 Soit  $M = \begin{pmatrix} c_1 & a & \dots & a \\ b & c_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & a \\ b & \dots & b & c_n \end{pmatrix}$  et  $H$  la matrice dont tous les coefficients valent 1.

1. Montrer que l'application  $f: x \mapsto \det(M + xH)$  est un polynôme de degré  $\leq 1$ .
2. Calculer  $f(-b)$  et  $f(-a)$ .
3. Si  $a \neq b$ , en déduire  $\det M$ .
4. Déterminer  $\det M$  si  $a = b$ .

**Y04 Exercice 6** Calculer le déterminant de  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ , puis, en utilisant la  $n$ -linéarité de  $\det$ , celui de  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

**LSC Exercice 7** Soit  $n \geq 2$ . Montrer que le déterminant de  $\begin{pmatrix} z & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & z & \dots & \vdots & a_1 \\ 0 & \vdots & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & z & a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & -1 & z+a_{n-1} \end{pmatrix}$  est égal à  $z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$ .

**T04 Exercice 8** 🍂 Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $x \in [-2, 2]$ . On pose  $d_n = \det(xI_n - A)$ .

1. Par convention,  $d_0 = 1$  et  $d_1 = x$ . Montrer que  $d_{n+2} = xd_{n+1} - d_n$ .
2. On pose  $x = 2 \cos \theta$ . Montrer que si  $\theta \neq 0[\pi]$ , il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  tels que  $\forall n, d_n = \alpha e^{in\theta} + \beta e^{-in\theta}$ . En déduire que

$$d_n = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta} \text{ si } \theta \neq 0[\pi].$$

**2N0 Exercice 9** Soient  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$  et  $A = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_2 & \vdots & \dots & x_1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_0 \end{pmatrix}$ .

1. Donner une expression de  $A$  en fonction de la matrice  $J = (\delta_{j \equiv i+1[n]})$  et de ses puissances.
2. Pour  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , soit  $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$  et  $X_k = (\omega_k^i)_{i \leq n-1} \in \mathbb{C}^n$ . Calculer  $AX_k$ , en fonction du polynôme  $P = \sum_{i=0}^{n-1} x_i X^i$ .
3. ★ En déduire que  $\det A = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega_k)$ .

**J7U Exercice 10** 🍂 Soient  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ .

1. Donner la valeur de  $\det(x_i^{j-1})_{1 \leq i, j \leq n}$ .
2. Soient  $(P_1, \dots, P_n) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$  une famille de polynômes unitaires avec  $\deg P_i = i-1$ . Calculer  $\det(P_j(x_i))$ .

**Indication :** On a  $\text{Vect}(P_1, \dots, P_k) = \mathbb{R}_{k-1}[X]$ . Faire des opérations sur les colonnes.

3. Calculer  $\det(\cos((j-1)x_i))_{i, j \leq n}$ .

**HHY Exercice 11** ★ DÉTERMINANT DE CAUCHY Soient  $(\alpha_i)_{i \leq n}$ , et  $(\beta_i)_{i \leq n}$  des complexes, avec  $\alpha_i + \beta_j \neq 0$ . Calculer  $\det\left(\frac{1}{\alpha_i + \beta_j}\right)_{i, j \leq n}$ .

## Générique

**5LM Exercice 12** Soit  $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{K})$  une matrice antisymétrique. Montrer que  $A$  n'est pas inversible.

**CCJ Exercice 13** 🍂 Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 = -I_n$ . Montrer que  $n$  est pair.

**WA8 Exercice 14** 🍂 Soit  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  nilpotente.

1. Déterminer  $\det N$ . *Dans la suite, on admet que  $N$  est semblable à une matrice triangulaire supérieure  $T$ .*
2. Déterminer les coefficients diagonaux de  $T$ , puis calculer  $\det(I_n + N)$ .
3. Soit  $U$  inversible commutant avec  $N$ . Montrer que  $\det(U + N) = \det U$ .

**069 Exercice 15**

1. Soit  $n \geq 2$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  vérifiant  $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(A + M) = \det A + \det M$ .

a) Montrer que  $A$  est non inversible.

**Ind :** Prendre  $M = \lambda A$ , pour un certain  $\lambda$

b) Soit  $C$  une colonne non nulle de  $\mathbb{K}^n$ . Montrer qu'il existe une matrice  $M$  inversible dont la  $i$ -ième colonne est  $C$ .

c) Montrer que si  $A$  est non nulle, il existe  $M$  inversible telle que  $A + M$  ne soit pas inversible.

d) Que dire de  $A$ ?

2. En déduire que si pour toute matrice  $M, \det(A + M) = \det(B + M)$ , alors  $A = B$ .

**304 Exercice 16**

1. Soient  $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrer que  $x \mapsto \det(U + xV)$  est une fonction polynomiale en  $x$ , et (★) que son degré est  $\leq \text{rang } V$ .

2. Montrer que si  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  sont semblables sur  $\mathbb{C}$ , alors elles sont semblables sur  $\mathbb{R}$ .

**Indication :** Écrire la relation de conjugaison, avec  $P = P_1 + iP_2$ .

**26Y Exercice 17** Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que si les coefficients de  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  sont (en valeur absolue)  $\leq \varepsilon$ , alors  $I_n + B$  est inversible.

2. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  inversible. Montrer qu'il existe  $\varepsilon' > 0$  tel que si les coefficients de  $B$  sont  $\leq \varepsilon$ , alors  $A + B$  est inversible.

3. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de rang  $r$ . Montrer qu'il existe  $\varepsilon'' > 0$  tel que si les coefficients de  $B$  sont  $\leq \varepsilon$ , alors  $\text{rang}(A + B) \geq r$ .

**EDF Exercice 18** ★ [ORAL X] Soit  $n$  pair et  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ . On suppose que les coefficients diagonaux de  $M$  sont nuls, et que les autres valent  $\pm 1$ . Montrer que  $M$  est inversible.

## Endomorphismes

**9DL Exercice 19** Déterminer le déterminant et la trace des endomorphismes de  $\mathbb{C}_n[X]$  suivant :

1.  $\Delta : P \mapsto P(X + 1) - P(X)$

2.  $\tau : P \mapsto P(X + 1)$

**UKB Exercice 20** Soit  $E$  un espace de dimension  $n$ ,  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $s$  une symétrie par rapport à  $F$ . Que dire de  $\det s$ ?

**RVS Exercice 21** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , et  $\varphi_A : B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto AB$ . Déterminer  $\det \varphi_A$ .

## Déterminants par blocs

**7BJ Exercice 22** Déterminer le déterminant de la matrice de  $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$  donnée par blocs  $\begin{pmatrix} O_n & I_n \\ I_n & O_n \end{pmatrix}$ .

**DUE Exercice 23** Soient  $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  avec  $A$  inversible.

1. Montrer que  $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det A \det(D - CA^{-1}B)$ .

2. Montrer que si  $AC = CA$ ,  $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD - BC)$ .

## Comatrice

**LXR Exercice 24** Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On suppose  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ .

1. On suppose que  $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$ . Montrer que  $\text{Com}(AB) = \text{Com}(A) \text{Com}(B)$ .

2. ★ Montrer que pour  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  assez proche de 0,  $A - \lambda I_n$  est inversible. En déduire que  $\text{Com}(AB) = \text{Com}(A) \text{Com}(B)$ .

3. En déduire que si  $A, B$  sont semblables,  $\text{Com}(A)$  et  $\text{Com}(B)$  le sont également.

**0Q1 Exercice 25** ♣ On note  $GL_n(\mathbb{Z}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \mid A \text{ inversible et } A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})\}$ . Soit  $A \in M_n(\mathbb{Z})$ . Montrer que  $A \in GL_n(\mathbb{Z})$  si et seulement si  $\det A = \pm 1$ .

**PCF Exercice 26** ★ [ORAL X] Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Discuter du rang de  $\text{Com } A$ .

## Autres

**2M3 Exercice 27** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on considère l'application  $f_A : C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \sum_{j=1}^n \det(C_1 \mid \dots \mid C_{j-1} \mid AC_j \mid \dots \mid C_n)$  où les  $C_i$

désignent les colonnes de la matrice  $C$ . Montrer que  $f_A = \text{Tr}(A) \det$ .

**Indication :**  $\det$  est l'unique forme  $n$ -linéaire alternée...

**44Q Exercice 28** NOMBRE DE DÉRANGEMENTS On note  $\mathcal{D}_n$  l'ensemble des dérangements de  $S_n$ ,  $\mathcal{D}_n^+ = \mathcal{D}_n \cap \mathcal{A}_n$  et  $\mathcal{D}_n^- = \mathcal{D}_n \setminus \mathcal{D}_n^+$ .

1. Montrer que  $n! = \sum_{k=0}^n |\mathcal{D}_k| \binom{n}{k}$ .

2. En déduire une expression explicite de  $|\mathcal{D}_n|$  comme une somme.

**Indication :** Écrire la relation précédente matriciellement, et l'inverser (exprimer les  $D_k$  en fonction des  $k!$ ).

3. Calculer  $|\mathcal{D}_n^+| - |\mathcal{D}_n^-|$ . En déduire  $|\mathcal{D}_n^+|$ .

**E7U Exercice 29** ★ On prend  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ .

1. Montrer que  $SL_n(\mathbb{K})$  est engendré par les transvections.

2. En déduire que  $SL_n(\mathbb{K})$  est connexe par arcs, c'est-à-dire que si  $A, B \in SL_n(\mathbb{K})$ , il existe une fonction  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  continue, telle que  $\gamma(0) = A$ ,  $\gamma(1) = B$  et  $\forall t, \gamma(t) \in SL_n(\mathbb{K})$ .

**1A8 Exercice 30** ★ [ENS] Soit  $E$  de dimension  $d$ . Déterminer la dimension de l'espace vectoriel des formes  $n$ -linéaires alternées sur  $E$ .